УДК 517.9

Ал. Ф. Тедеев, В. Ю. Шелепов

ОБ L_p-ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕГЛАДКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В областях, являющихся пространственным аналогом радоновских областей без точек заострения на плоскости, рассматриваются классические решения равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Установлены условия существования граничных значений почти всюду и в метриках L_p, $p \geqslant 2$, с весом, удовлетворяющим условию (A_∞).

В настоящей статье получены L_p-аналоги результатов работ [1—3] при $p \geqslant 2$. Краткое изложение данной работы содержится в [4]. Аналогичные теоремы при $p > 1$ в случае полупространства и при отсутствии веса анонсированы в [5]. Для неотрицательных решений описываемые результаты установлены в [6, 7].

1. Обозначим точки пространства R^{n+1} через $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$, а также $x = (z_1, \ldots, z_n)$, $y = z_{n+1}$, $z = (x, y)$. Пусть Ω — область вида $\Omega = \{(x, y) : x \in R^n,\ y > \varphi(x)\}$, где

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x); \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \text{ — выпуклые функции,} \tag{1}$$

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| \leqslant L_i |x - x'|, \quad i = 1,\ 2. \tag{2}$$

При $h > 0$ положим

$$\Omega_h = \{z \in \Omega:\ y > \varphi(x) + h\}, \quad \Omega^h = \{z \in \Omega:\ y < \varphi(x) + h\}.$$

Рассмотрим определенное внутри Ω классическое решение равномерно эллиптического уравнения

$$\mathscr{L}u \equiv a^{ij}(z)\, u_{z_i z_j} + a^i(z)\, u_{z_i} + a^0(z)\, u = f(z) \tag{3}$$

($i, j = \overline{1, n+1}$, $a^{ij} = a^{ji}$). Коэффициенты непрерывны и ограничены вместе с первыми производными, правая часть непрерывна в Ω.

Возьмем число $a > 0$ и для любого $x \in R^n$ введем множество

$$\Delta(x) = \Delta_a(x, \varphi) = \{(s, y):\ s \in R^n,\ y > \varphi(x) + a^{-1}|s - x|\}$$

— прообраз конуса $|s - x| < a\eta$ при отображении

$$x = x, \quad \eta = y - \varphi(x) \tag{4}$$

области Ω на полупространство $R_+^{n+1} = \{(x, \eta) : \eta > 0\}$. Зафиксируем число $p \geqslant 2$. Если W — измеримое множество в Ω, определим в R^n функции

$$N_W(x) = N_{W,a}(x) = \sup_{\Delta(x) \cap W} |u(s, y)|,$$

$$F_W(x) = F_{W,a}(x) = \sup_{\Delta(x) \cap W} \{(y - \varphi(s))\, |f(s, y)|\},$$

$$D_W^{(p)}(x) = D_{W,a}^{(p)}(x) = \sup_{\Delta(x) \cap W} \{(y - \varphi(s))\, |u(s, y)|^{\frac{p}{2} - 1}\, |\nabla u(s, y)|\}^{\frac{2}{p}},$$

$$S_W^{(p)}(x) = S_{W,a}^{(p)}(x) = \left(\iint_{\Delta(x) \cap W} (y - \varphi(s))^{1-n}\, |u|^{p-2}\, |\nabla u|^2\, ds\, dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $\Delta(x) \cap W = \varnothing$ считаем их нулем. Функцию $S_W^{(p)}(x)$ мы называем p-интегралом площадей.

Ниже $B(x, r)$ — шар с центром x радиуса r в R^n, $K(z, r)$ — аналогичный шар в R^{n+1}, m — мера Лебега в R^n ($dm = dx$), c — различные постоянные, не зависящие от $u(z)$.

Пусть G — открытое ограниченное множество в R^n,

$$P = \operatorname{int}(\Omega \setminus \bigcup_{x \notin G} \Delta(x)), \quad y_s = \sup\{y: (s, y) \in P\},$$

$$V_P^0(x) = \begin{cases} \sup\{|u(s, y) - u(s, y_s)|: (s, y) \in \Delta(x) \cap P\}, & p = 2, \\ \sup\{||u(s, y)|^{\frac{p}{2}} - |u(s, y_s)|^{\frac{p}{2}}|^{\frac{2}{p}}: (s, y) \in \Delta(x) \cap P\}, & p > 2. \end{cases}$$

Теорема 1. Если $u(z)$ — решение уравнения (3), $\alpha, \beta \in (1, \infty)$, $\omega, \rho > 0$, то найдется число $a_0 > 0$ со следующими свойствами: взяв $a > a_0$, можно указать такие не зависящие от $u(z)$ числа $\gamma, \delta, r_0 > 0$, что при $\operatorname{diam} G < r_0$ справедливо неравенство

$$\alpha m(N_P^0 > \beta\lambda) < m(N_P^0 > \lambda) + \alpha[cm(S_P^{(p)} > \gamma\lambda) + m(D_P^{(p)} > \delta\lambda) + \\ + m(F_P > \rho\lambda) + m(N_P > \omega\lambda)] \quad \forall \lambda > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Введем функции

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z), & p = 2, \\ |u(z)|^{\frac{p}{2}}, & p > 2, \end{cases} \quad z \in \Omega, \tag{6}$$

$$M_P(x) = \sup|\tilde{u}(s, y)|, \quad D_P(x) = \sup\{(y - \varphi(s))|\nabla\tilde{u}(s, y)|\},$$

$$A_P(x) = \left(\iint_{\Delta(x) \cap P} (y - \varphi(s))^{1-n} |\nabla\tilde{u}|^2 ds dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_P^0(x) = \sup|\tilde{u}(s, y) - \tilde{u}(s, y_s)|, \quad x \in R^n,$$

где точные верхние грани берутся по множеству $\Delta(x) \cap P$. (Если это множество пусто, полагаем $M_P = D_P = A_P = M_P^0 = 0$.) Тогда нам достаточно доказать неравенство вида

$$\alpha m(M_P^0 > \beta\lambda) < m(M_P^0 > \lambda) + \alpha[cm(A_P > \gamma\lambda) + m(D_P > \delta\lambda) + \\ + m(F_P > \rho\lambda^{\frac{2}{p}}) + m(M_P > \omega\lambda)] \quad \forall \lambda > 0 \tag{7}$$

с заданным $\alpha, \beta, \omega, \rho$ и искомыми γ, δ, r_0.

Пусть $\pi_{\gamma,\lambda}(x)$ — характеристическая функция множества $\{A_P > \gamma\lambda\}$,

$$\pi_{\gamma,\lambda}^*(x) = \sup\left\{m^{-1}(B)\int_B \pi_{\gamma,\lambda}(s) ds: B \ni x\right\} \tag{8}$$

— соответствующая функция Харди — Литтлвуда,

$$E = \left\{M^0 > \beta\lambda, \pi_{\gamma,\lambda}^* \leqslant \frac{1}{2}, D_P \leqslant \delta\lambda, F_P \leqslant \rho\lambda, M_P \leqslant \omega\lambda\right\}, \tag{9}$$

$$G_0 = \{M_P^0 > \lambda\}. \tag{10}$$

Докажем, что при достаточно малых a^{-1}, γ, δ, $\operatorname{diam} G$ выполняется неравенство

$$\alpha m(E) < m(G_0). \tag{11}$$

Поскольку

$$\alpha m(M_P^0 > \beta\lambda) \leqslant \alpha m(E) + \alpha\left[m\left(\pi_{\gamma,\lambda}^* > \frac{1}{2}\right) + m(D_P > \delta\lambda) + m(F_P > \rho\lambda) + \\ + m(M_P > \omega\lambda)\right],$$

(7) с очевидностью следует из (11) и того, что ввиду известного свойства функции Харди — Литтлвуда (см. [8, с. 15])

$$m\left(\pi_{\gamma,\lambda}^* > \frac{1}{2}\right) \leqslant c(n)\|\pi_{\gamma,\lambda}\|_{L_1(R^n)} = c(n)m(A_P > \gamma\lambda).$$

Неравенство (11) доказывается от противного. Пусть

$$m(G_0) \leqslant \alpha m(E).$$

Тогда согласно 1 (см. ниже лемму 2) найдется шар $B \subset G_0$, такой, что

$$\partial B \cap \partial G_0 \neq \Phi, \quad m(B) \leqslant c_1 \alpha m \quad (E \cap B). \tag{12}$$

Доказательство невозможности (12) при достаточно малых α^{-1}, γ, δ, diam B проводится так же, как в теореме 1 [3] за исключением утверждения 3 последней (см. [3, с. 455]). Приведем аналог этого утверждения в нашем случае (следующая ниже лемма 1). Это завершит доказательство нашей теоремы.

Пусть функции φ, φ_1, φ_2 вдобавок к предположениям (1), (2) дважды непрерывно дифференцируемы. Совершим отображение (4) области Ω на R_+^{n+1} и положим $\zeta = (x, \eta) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$. Пусть $u(z)$, $\tilde{u}(z)$ переходят при этом в функции $u(\zeta)$, $\tilde{u}(\zeta)$, а (3) в уравнение

$$b^{ij}(\zeta) u_{\zeta_i\zeta_j} + b^i(\zeta) u_{\zeta_i} + b^0(\zeta) u = g(\zeta). \tag{13}$$

Последнее равномерно эллиптично вместе с (3).

Лемма 1. Пусть $p > 2$, V^r — конус в R_+^{n+1} с основанием $B = B(0, r)$ и вершиной $\zeta_0 = (0, a^{-1}r)$, область $W \subset V^r$ ограничена поверхностями $(\partial W)^{\pm} = \{\zeta : \eta = \psi^{\pm}(x)\}$, где функции $\psi^{\pm}$ определены в замкнутой области $Q_0 \subset B$, удовлетворяют условию Липшица с константой a^{-1} и $\psi^+ = \psi^-$ на ∂Q_0. Пусть $v(\zeta) = \tilde{u}(\zeta) - \tilde{u}(\zeta_0)$, $\theta = (\beta - 1)/2$ и выполняются условия

$$|\tilde{u}| \leqslant \omega\lambda, \quad |v| \leqslant \theta\lambda, \quad \eta|\nabla v| \leqslant \delta\lambda, \quad \eta|g| \leqslant \rho\lambda^{\frac{2}{p}} \quad \text{в} \quad \overline{W},$$

$$|v| \leqslant \sqrt{a^2+1}\,\delta\lambda \quad \text{на} \quad (\partial W)^+,$$

$|v| > \theta\lambda/2$ на множестве $\Sigma \subset (\partial W)^-$, причем $m(\mathcal{P}(\Sigma)) \geqslant cm(B)$, где $\mathcal{P}(\Sigma)$ — проекция Σ на R_x^n, $c = \text{const} > 0$. Тогда для достаточно большого a найдутся столь малые δ, r_0, что при $r < r_0$ справедливо неравенство

$$\iint\limits_W \eta |\nabla v|^2 d\zeta \geqslant c_1 m(B)\lambda^2, \quad c_1 = \text{const} > 0. \tag{14}$$

Доказательство. Будем считать вначале $p \geqslant 4$. Тогда функция $|t|^{\frac{p}{2}}$ дважды непрерывно-дифференцируема на оси R^1. Следовательно, $v(\zeta) = |u(\zeta)|^{\frac{p}{2}} - |u(\zeta_0)|^{\frac{p}{2}}$ обладает аналогичным свойством в R_+^{n+1}:

$$v_{\zeta_i} = (p/2)|u|^{\frac{p}{2}-1}(\operatorname{sgn} u)\, u_{\zeta_i},$$

$$v_{\zeta_i\zeta_j} = (p/2)(p/2-1)|u|^{\frac{p}{2}-2} u_{\zeta_i}u_{\zeta_j} + (p/2)|u|^{\frac{p}{2}-1}(\operatorname{sgn} u)\, u_{\zeta_i\zeta_j}.$$

Ввиду ограниченности коэффициентов уравнения (13), вместо (14) можно оценивать интеграл от $\eta|u|^{p-2}b^{ij}u_{\zeta_i}u_{\zeta_j}$.

Используя уравнение (13), имеем

$$(p/2)^2\eta|u|^{p-2}b^{ij}u_{\zeta_i}u_{\zeta_j} = \eta b^{ij}v_{\zeta_i}v_{\zeta_j} = (\eta b^{ij}v_{\zeta_i}v)_{\zeta_j} - (\eta b^{ij}v_{\zeta_i})_{\zeta_j} v =$$

$$= (\eta b^{ij}v_{\zeta_i}v)_{\zeta_j} - 2^{-1}(b^{i,n+1}v^2)_{\zeta_i} + 2^{-1}b^{i,n+1}_{\zeta_i}v^2 - \eta b^{ij}_{\zeta_j}v_{\zeta_i}v -$$

$$-\eta(p/2)(p/2-1)|u|^{\frac{p}{2}-2}b^{ij}u_{\zeta_i}u_{\zeta_j}(|u|^{\frac{p}{2}} - |u(\zeta_0)|^{\frac{p}{2}}) -$$

$$-\eta(p/2)|u|^{\frac{p}{2}-1}(\operatorname{sgn} u)\, gv + \eta b^i v_{\zeta_i}v + \eta(p/2)|u|^{\frac{p}{2}}b^0 v.$$

Член, содержащий $u_{\zeta_i}u_{\zeta_j}$, перенесем налево, отбросив $|u(\zeta_0)|^{\frac{p}{2}}$. Умножив полученное неравенство на 2 и проинтегрировав по частям, получим (ν — внешняя нормаль к ∂W; $i, j = \overline{1, n+1}$; $k = \overline{1, n}$):

$$p(p-1)\iint\limits_W \eta|u|^{p-2}b^{ij}u_{\zeta_i}u_{\zeta_j}d\zeta \geqslant 2\int\limits_{\partial W} \eta b^{ij}v_{\zeta_i}\cos(\nu, \zeta_j)\, d\sigma -$$

$$- \int_{\partial W} b^{n+1,n+1} v^2 \cos(\nu, \eta)\, d\sigma - \int_{\partial W} b^{k,n+1} v^2 \cos(\nu, x_k)\, d\sigma +$$

$$\iint_W b^{i,n+1}_{\zeta_i} v^2 d\zeta - 2 \iint_W \eta b^{ij}_{\zeta_j} v_{\zeta_i} v d\zeta - p \iint_W \eta\, |u|^{\frac{p}{2}-1} (\operatorname{sgn} u)\, g v d\zeta +$$

$$+ 2 \iint_W \eta b^i v_{\zeta_i} v d\zeta + p \iint_W \eta b^0 |u|^{\frac{p}{2}} v d\zeta. \qquad (15)$$

В случае $2 < p < 4$ вторые производные функции $v(\zeta)$ разрывны на множестве $\{\zeta : u(\zeta) = 0\}$. Поэтому, взяв $\varepsilon > 0$, введем сначала сглаженную функцию

$$\overset{(\varepsilon)}{v}(\zeta) = k_\varepsilon(u(\zeta)) - k_\varepsilon(u(\zeta_0)),$$

где

$$k_\varepsilon(t) = \frac{p(p-4)}{32} \varepsilon^{\frac{p}{2}-4} t^4 + \frac{p(8-p)}{16} \varepsilon^{\frac{p}{2}-2} t^2 + \frac{32 - 12p + p^2}{32} \varepsilon^{\frac{p}{2}}$$

при $|t| \leqslant \varepsilon$; $k_\varepsilon(t) = |t|^{\frac{p}{2}}$ при $|t| > \varepsilon$.

Это положительная, четная дважды непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, обладающая при $t > 0$ свойствами:

$$k_\varepsilon'''(t) < 0, \quad k_\varepsilon''(t) > 0, \quad k_\varepsilon'(t) > 0.$$

Поступая с $\overset{(\varepsilon)}{v}(t)$ точно так же, как при $p \geqslant 4$, мы действовали с функцией $v(\zeta)$, получаем

$$2 \iint_W \eta b^{ij} ([k_\varepsilon'(u)]^2 + k_\varepsilon''(u) k_\varepsilon(u)) u_{\zeta_i} u_{\zeta_j} d\zeta \geqslant 2 \int_{\partial W} \eta b^{ij} \overset{(\varepsilon)}{v}_{\zeta_i} \overset{(\varepsilon)}{v} \cos(\nu, \zeta_i)\, d\sigma -$$

$$- \int_{\partial W} b^{n+1,n+1} \overset{(\varepsilon)}{v}{}^2 \cos(\nu, \eta)\, d\sigma - \int_{\partial W} b^{k,n+1} \overset{(\varepsilon)}{v}{}^2 \cos(\nu, x_k)\, d\sigma +$$

$$+ \iint_W b^{i,n+1}_{\zeta_i} \overset{(\varepsilon)}{v}{}^2 d\zeta - 2 \iint_W \eta b^{ij}_{\zeta_j} \overset{(\varepsilon)}{v}_{\zeta_i} \overset{(\varepsilon)}{v} d\zeta - 2 \iint_W \eta k_\varepsilon'(u)\, g \overset{(\varepsilon)}{v} d\zeta +$$

$$+ 2 \iint_W \eta b^i \overset{(\varepsilon)}{v}_{\zeta_i} \overset{(\varepsilon)}{v} d\zeta + 2 \iint_W \eta b^0 k_\varepsilon'(u)\, u \overset{(\varepsilon)}{v} d\zeta. \qquad (16)$$

При $|u| \leqslant \varepsilon$ имеем: $0 \leqslant k_\varepsilon''(u) k_\varepsilon(u) \leqslant k_\varepsilon''(0) k_\varepsilon(\varepsilon) = (p/8)(8-p)\varepsilon^{p-2}$. Если же $|u| > \varepsilon$, то $k_\varepsilon''(u) k_\varepsilon(u) \leqslant (p/2)(p/2-1)|u|^{p-2}$. Итак, все подынтегральные выражения в (16) ограничены и в каждой точке $\zeta \in W$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к соответствующим выражениям неравенства (15). Устремляя $\varepsilon \to 0$, мы, ввиду теоремы Лебега, снова придем к (15). Дальнейшие оценки аналогичны соответствующим оценкам в теореме 1 работы [3, с. 456, 457].

Теорема 2. Если $u(z)$ — решение уравнения (3), α, $\beta \in (1, \infty)$, ρ, $r_0 >$ < 0, то найдутся такие не зависящие от $u(z)$ числа γ, $\delta > 0$, что при $\operatorname{diam} G < r_0$ справедливо неравенство

$$\alpha m(S_P^{(p)} > \beta\lambda) < m(S_P^{(p)} > \lambda) + \alpha [m(N_P > \gamma\lambda) + m(D_P^{(p)} > \delta\lambda) +$$
$$+ m(F_P > \rho\lambda)] \quad \forall \lambda > 0. \qquad (17)$$

Эта теорема аналогично предыдущей путем введения функции (6) сводится к теореме 2 [3, с. 458].

Пусть $w(x) > 0$ — локально суммируемая функция, определим меру

$$m_w(E) = \int_E w(x)\, dx \quad (dm_w = w(x)\, dx).$$

В дальнейшем предполагается выполненным известное условие (A_∞) Макенхаупта — Феффермана: существуют такие константы $C < \infty$, $\theta > 0$, что для любого шара $B \subset R^n$ и любого измеримого множества $E \subset B$

$$m_w(E)/m_w(B) \leqslant C(m(E)/m(B))^\theta. \qquad (A_\infty)$$

Лемма 2. Пусть G_0 — открытое ограниченное множество в R^n и $\alpha > 1$. Если измеримое множество $E \subset G_0$ таково, что

$$m_w(G_0) \leqslant \alpha m_w(E),$$

то найдутся константа $c_0 = c_0(n, w)$ и шар $B \subset G_0$, такие, что

$$m_w(B) \leqslant c_0 \alpha m_w(E \cap B), \quad \partial B \cap \partial G_0 \neq \varnothing. \tag{18}$$

Доказательство. Представим G_0 по Уитни (см. [8, с. 199]) в виде $G_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, где Q_k — кубы с непересекающимися внутренними частями, для которых отношение расстояния до ∂G_0 к диаметру ограничено числами 1 и 4. Среди них, очевидно, найдется такой куб Q_{k_0}, что

$$m_w(Q_{k_0}) \leqslant \alpha m_w(E \cap Q_{k_0}). \tag{19}$$

Множество шаров с тем же центром, что и Q_{k_0}, содержащих Q_{k_0} и содержащихся в G_0, не пусто. В качестве B возьмем максимальный из них. Тогда $\partial B \cap \partial G_0 \neq \varnothing$. Если B' — шар с тем же центром, что и Q_{k_0}, вписанный в Q_{k_0}, то из условия (A_∞) вытекает, что найдется такая константа $c_0 = c_0(n, w)$, что

$$m_w(B) \leqslant c_0 m_w(B') \tag{20}$$

(см. аналогичное свойство для кубов [2, с. 110]). Из (19), (20) вытекает первое неравенство (18).

Теорема 3. В неравенстве (5) теоремы 1 и неравенстве (17) теоремы 2 меру Лебега m можно заменить мерой m_w.

Доказательство. Определим функции $\pi_{\gamma,\lambda}(x)$, $\pi^*_{\gamma,\lambda}(x)$, как в теореме 1. Как доказали Muckenhoupt [9] и Wo-Sang-Young, вес w, удовлетворяющий условию (A_∞), удовлетворяет при некотором $q \in (1, \infty)$ условию (A_q). Следовательно, для любой локально суммируемой функции $f(x)$ и соответствующей функции Харди — Литтлвуда $f^*(x)$, определяемой аналогично (8), выполняется неравенство

$$\int\limits_{R^n} (f^*)^q w dx \leqslant c \int\limits_{R^n} |f|^q w dx$$

(см. [10, 11]). Теперь имеем

$$m_w\left(\pi^* > \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{\left\{\pi^* > \frac{1}{2}\right\}} w dx < 2^p \int\limits_{R^n} (\pi^*)^q w dx \leqslant 2^q c \int\limits_{R^n} \pi^q w dx =$$

$$= 2^q c m_w(A_P > \gamma\lambda). \tag{21}$$

Определим множества E, G_0 формулами (9), (10). Ввиду (21) нам достаточно доказать (см. теорему 1), что

$$\alpha m_w(E) < m_w(G_0). \tag{22}$$

Пусть $\alpha_0 = c_0 \alpha \ (> 1)$, где c_0 — константа из леммы 2. Будем считать константу C в условии (A_∞) большей 1 и положим

$$\alpha_1 = (C\alpha_0)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{23}$$

Пусть B — шар в G_0, такой, что $\partial B \cap \partial G_0 \neq \varnothing$. В теореме 1 доказывается, что при достаточно малых a^{-1}, γ, δ, r_0 и $\operatorname{diam} B < r_0$ будет

$$\alpha_1 m(E \cap B) < m(B).$$

Из условия (A_∞) следует, что тогда

$$\frac{m_w(E \cap B)}{m_w(B)} \leqslant C\left(\frac{m(E \cap B)}{m(B)}\right)^\theta < \frac{C}{\alpha_1^\theta},$$

откуда в соответствии с (23) вытекает

$$\alpha_0 m_w(E \cap B) < m_w(B).$$

Теперь ясно, что для указанных a, γ, δ, r_0 и $\operatorname{diam} G < r_0$ неравенство (22) справедливо, ибо из обратного неравенства ввиду леммы 2 вытекало бы существование такого шара $B \subset G_0$, что

$$\partial B \cap \partial G_0 \neq \varnothing, \quad m_w(B) \leqslant \alpha_0 m_w(E \cap B).$$

Лемма 3. Пусть $u(z)$ — решение однородного уравнения $\mathscr{L}u = 0$. Предположим, что $h \in (0, H]$, $a_1 > a > 0$. Если области $W \subset W_1 \subset \Omega^h$ таковы, что при некотором $l \in (0, 1)$ и любых $x \in R^n$, $z_0 = (x_0, y_0) \in \Delta_a(x) \cap \cap W$ замкнутый шар $\overline{K}(z_0, l(y_0 - \varphi(x_0)))$ лежит в $\Delta_{a_1}(x) \cap W_1$, то найдется такое c, не зависящее от u и h, что

$$D^{(p)}_{W,a}(x) \leqslant (S^{(p)}_{W_1,a_1}(x) + h^{\frac{4}{p}} N_{W_1,a_1}(x)) \quad \forall x \in R^n. \tag{24}$$

Доказательство. Докажем вначале, что если $r \in (0, H]$ и шар $\overline{K} = \overline{K}(z_0, r)$ лежит в Ω, то существует такое c_1, что

$$(r\,|u(z_0)|)^{\frac{p}{2}-1}\,|\nabla u(z_0)|^{\frac{2}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left[\left(\iint\limits_K r^{1-n}\,|u|^{p-2}\,|\nabla u|^2\,dz \right)^{\frac{1}{p}} + r^{\frac{4}{p}}\,\|u\|_{C(\overline{K})} \right]. \tag{25}$$

Положим $\tau = (z - z_0)/r$, $u^1(\tau) = u(z_0 + r\tau)$, $a_1^{ij}(\tau) = a^{ij}(z_0 + r\tau)$, ... Функция $u^1(\tau)$ удовлетворяет в $\overline{K}_1 = \overline{K}(0, 1)$ уравнению

$$\mathscr{L}_r u^1 \equiv a_1^{ij}(\tau)\,u^1_{\tau_i\tau_j} + r a_1^i(\tau)\,u^1_{\tau_i} + r^2 a_1^0(\tau)\,u^1 = 0.$$

Пусть $\overline{K}' \subset K_1$. Взяв $q > n + 1$, так что $W_q^2 \subset\to C^1$, используем внутреннюю априорную L_q-оценку:

$$\|u^1\|_{C^1(\overline{K}')} \leqslant c_2 \|u^1\|_{W_q^2(K')} \leqslant c_3 \|u^1\|_{L_p(K_1)}, \tag{26}$$

Рассмотрим множество решений, каждое из которых обращается в ноль в некоторой (своей) точке шара $\overline{K}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тогда для $|u^1|^{\frac{p}{2}}$ справедливо неравенство Пуанкаре

$$\|u^1\|^p_{L_p(K_1)} = \iint\limits_{K_1} (|u^1|^{\frac{p}{2}})^2\,d\tau \leqslant c_4 \iint\limits_{K_1} \|u^1\|^{p-2}\,|\nabla u^1|^2\,d\tau \tag{27}$$

с константой c_4, единой для всех рассматриваемых решений. Действительно, допустим, что существует последовательность указанных решений u_l^1, $l = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|\,|u_l^1|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)} \geqslant l\,\|\nabla\,|u_l^1|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)}$. Положим $v_l = u_l^1/\|u_l^1\|_{L_p(K_1)}$. Тогда $\|\,|v_l|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)} = 1$, $\|\,|v_l|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)} \geqslant l\,\|\nabla\,|v_l|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)}$, так что $\|\nabla\,|v_l|^{\frac{p}{2}}\|_{L_2(K_1)} \to 0$ при $l \to \infty$. Ввиду ограниченности последовательности $\{\,|v_l|^{\frac{p}{2}}\}$ в норме W_2^1 ее можно считать сходящейся слабо в W_2^1 и сильно в L_2 к некоторой функции w. Тогда, как легко видеть,

$$\|w\|_{L_2(K_1)} = 1, \quad \|\nabla w\|_{L_2(K_1)} = 0. \tag{28}$$

Из оценки (26), примененной к v_l, вытекает, что последовательность $\{v_l\}$ ограничена в норме $C^1(\overline{K}')$. Поэтому в любом шаре $\overline{K}' \subset K_1$ она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и ее можно считать равномерно сходящейся в $\overline{K}'$. Тогда функция w непрерывна в $\overline{K}'$ и из второго равенства (28) вытекает, что она постоянна в K_1. Нули $\tau^{(l)}$ функции v_l в $\overline{K}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ можно считать сходящимися к некоторой точке τ^0. Тогда

$$|w(\tau^0)| \leqslant \left| w(\tau^0) - |v_l(\tau^0)|^{\frac{p}{2}} \right| + \left| |v_l(\tau^0)|^{\frac{p}{2}} - \right.$$

$$\left. - |v_l(\tau^{(l)})|^{\frac{p}{2}} \right| \leqslant \left| w(\tau^0) - |v_l(\tau^0)|^{\frac{p}{2}} \right| + c_5 |\tau^0 - \tau^{(l)}| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $w(\tau^0) = 0$ и значит $w \equiv 0$ в K_1, а это противоречит первому равенству (28). Из (26), (27) для рассматриваемых решений получаем

$$|\nabla u^1(0)|^2 \leqslant c_6 \left(\iint\limits_{K_1} |u^1|^{p-2} |\nabla u^1|^2 d\tau \right)^{\frac{2}{p}},$$

$$|u^1(0)|^{p-2} \leqslant c_6 \left(\iint\limits_{K_1} |u^1|^{p-2} |\nabla u^1|^2 d\tau \right)^{\frac{p-2}{p}},$$

откуда вытекает (25) (без второго члена справа).

Рассмотрим теперь множество решений, не обращающихся в ноль в $\overline{K}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Они сохраняют там знак и их можно считать там положительными, что мы и будем делать. Пусть $\overline{u}$ — среднее значение u^1 в шаре $K\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Введем $u^0(\tau) = u^1(\tau) - \overline{u}$. Тогда $\mathcal{L}_r u^0 = -r^2 a^0(\tau)\,\overline{u}$. В данном случае вложение $W_q^2 \subset C^1$, внутренняя L_q-оценка и неравенство Пуанкаре дают

$$|\nabla u^1(0)| \leqslant c_7 \|u^0\|_{W_q^2\left(K\left(0,\frac{1}{8}\right)\right)} \leqslant c_8 \left(\|r^2 a^0 u\|_{L_q\left(K\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)} + \right.$$

$$\left. + \|u^0\|_{L_2\left(K\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)} \right) \leqslant c_9 \left(r^2 \|u^1\|_{C\left(\overline{K}\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)} + \left(\iint\limits_{K\left(0,\frac{1}{4}\right)} |\nabla u^1|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right). \qquad (29)$$

Аналогично (26) получаем:

$$u^1(0) \leqslant c_{10} \|u^1\|_{L_p\left(K\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)} \leqslant c_1 \|u^1\|_{C\left(\overline{K}\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)}.$$

По неравенству Гарнака (см. [12])

$$\max_{\overline{K}\left(0,\frac{1}{4}\right)} u^1 \leqslant c_{12} \min_{\overline{K}\left(0,\frac{1}{4}\right)} u^1,$$

$$u^1(0)^{\frac{p}{2}-1} \leqslant c_{13} \left(\min_{\overline{K}\left(0,\frac{1}{4}\right)} u^1 \right)^{\frac{p}{2}-1}. \qquad (30)$$

Перемножая (29), (30), возводя в степень $2/p$ и возвращаясь к переменной z получаем (25).

Возьмем теперь $r = l(y_0 - \varphi(x_0))$. Тогда (24) следует из (25), так как

$$y - \varphi(x) \leqslant c_{14}(y_0 - \varphi(x_0)) \quad \forall (x, y) \in K(z_0, l(y_0 - \varphi(x_0)))$$

и z_0 — произвольная точка из $\Delta_a(x) \cap W$.

Лемма 4. Если в условиях леммы 3 $u(z)$ — решение уравнения (3) $l \in (0, (1 + L)^{-1}$, где L — константа Липшица функции $\varphi(x)$, то

$$D_{W,a}^{(p)}(x) \leqslant c\,(N_{W_1,a_1}(x) + hF_{W_1,a_1}(x)) \quad \forall x \in R^n \qquad (31)$$

и при $p = 2$ справедливо неравенство

$$D_{W,a}^{(2)}(x) \leqslant c\,(S_{W_1,a_1}^{(2)}(x) + h^2 N_{W_1,a_1}(x) + hF_{W_1,a_1}(x)).$$

Доказательство. Покажем, что если $r \in (0, H]$ и шар $\overline{K} = \overline{K}(z_0, r)$ лежит в Ω, то существует такое c_1, что

$$\left(r\,|u(z_0)|^{\frac{p}{2}-1} |\nabla u(z_0)| \right)^{\frac{2}{p}} \leqslant c_1 (r^2 \|f\|_{C(\overline{K})} + \|u\|_{C(\overline{K})}). \qquad (32)$$

Переходя, как в лемме 3, к переменной τ, полагая $f^1(\tau) = f(z_0 + r\tau)$ и используя внутреннюю априорную L_q-оценку, получаем

$$|\nabla u^1(0)| \leqslant c_2 (r^2 \|f^1\|_{C(\overline{K}_1)} + \|u^1\|_{C(\overline{K}_1)}),$$

$$|u^1(0)| \leqslant c_2 (r^2 \|f^1\|_{C(\overline{K}_1)} + \|u^1\|_{C(\overline{K}_1)}).$$

Отсюда

$$|u^1(0)|^{\frac{p}{2}-1} |\nabla u^1(0)| \leqslant c_3 (r^2 \|f^1\|^{\frac{p}{2}} + \|u^1\|^{\frac{p}{2}}_{C(\overline{K}_1)} +$$

$$+ r^{p-2} \|f^1\|^{\frac{p}{2}-1}_{C(\overline{K}_1)} \|u^1\|_{C(\overline{K}_1)} + \|u^1\|^{\frac{p}{2}-1}_{C(\overline{K}_1)} r^2 \|f^1\|_{C(\overline{K}_1)}).$$

Применяя к двум последним слагаемым неравенство Юнга с показателями $p/p-2$, $p/2$, возводя в степень $2/p$ и возвращаясь к переменной z, приходим к (32).

Возьмем $r = l(y_0 - \varphi(x_0))$. Тогда (31) следует из (32), так как

$$y_0 - \varphi(x_0) \leqslant c_8 (y - \varphi(x)) \quad \forall (x, y) \in K(z_0, l(y_0 - \varphi(x_0)))$$

и z_0 — произвольная точка из $\Delta_a(x) \cap W$.

Доказательство последнего утверждения леммы см. в [3, с. 448, 449].

Лемма 5. Для любых измеримых множеств $E \subset R^n$, $W \subset \Omega$ имеет место равенство

$$\int\limits_E [S_W^{(p)}]^p \, dm_\omega = \iint\limits_W (y - \varphi(s))^{1-n} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 m_\omega (E \cap B(s, a(y - \varphi(s)))) \, ds dy.$$

Это утверждение доказывается аналогично лемме 2 [3].

2. Функция, определенная в Ω, называется нетангенциально ограниченной вблизи точки $z' \in \partial\Omega$, если она ограничена в некотором конусе γ, таком, что $\overline{\gamma} \setminus \{z'\} \subset \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{P}(E)$ проекцию множества $E \subset R^{n+1}$ на R^n_x.

Опираясь на теоремы 1—3 и леммы 3—5, получаем следующие результаты, которые доказываются аналогично соответствующим утверждениям статьи [3] (последняя развивает методы работ [1, 2]).

Теорема 4. Если решение $u(z)$ уравнения (3) в области Ω вида (1), (2) и функция $(y - \varphi(x)) f(z)$, где $z = (x, y)$, нетангенциально ограничены вблизи каждой точки множества $E \subset \partial\Omega$, $m(\mathfrak{p}(E)) > 0$, то для всех $h > 0$, $a > 0$ функция $S^{(p)}_{\Omega^h, a}(x)$ конечна почти всюду (п. в.) на $\mathfrak{P}(E)$ и почти в каждой точке $z_0 = (x_0, y_0) \in E$ существует конечный некасательный предел

$$\lim u(z), \quad z \to z_0, \quad z \in \Delta_a(x_0). \tag{33}$$

Если $u(z)$ — решение однородного уравнения $\mathscr{L}u = 0$, в котором $a^0(z) \equiv 0$ и для некоторых $h > 0$, $a > a_0$, где a_0 — число из теоремы 1 при $\alpha = 2$, выполняется условие

$$S^{(p)}_{\Omega^h, 2a}(x) < \infty \quad \forall x \in \mathfrak{P}(E),$$

то почти в каждой точке $z_0 = (x_0, y_0) \in E$ существует конечный предел (33).

Теорема 5. Пусть $\Phi(\lambda)$ — неотрицательная неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$; $\Phi(2\lambda) \leqslant \nu_0 \Phi(\lambda)\ \forall \lambda > 0$, $\nu_0 = \mathrm{const}$. Если $u(z)$ — решение уравнения (3), $H > 0$, то при достаточно малых $h \in (0, H)$

$$\int\limits_{R^n} \Phi(S^p_{\Omega^h}) \, dm_\omega \leqslant c \int\limits_{R^n} [\Phi(N_{\Omega^H}) + \Phi(F_{\Omega^H})] \, dm_\omega.$$

Если $p = 2$, a^{-1} достаточно мало и вдобавок к вышесказанному для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\Phi(\delta\lambda) < \varepsilon\Phi(\lambda)\ \forall \lambda > 0$, то

$$\int\limits_{R^n} \Phi(N_{\Omega^h}) \, dm_\omega \leqslant c \int\limits_{R^n} [\Phi(S^{(p)}_{\Omega^H}) + \Phi(F_{\Omega^H}) + \Phi(N_{\Omega^H \cap \Omega_h})] \, dm_\omega. \tag{34}$$

Если $u(z)$ — решение уравнения $\mathscr{L}u = 0$, неравенство (34) без члена $\Phi(F_{\Omega^H})$ справедливо при любом $p \geqslant 2$.

Следствие 1. Пусть $u(z)$ — решение уравнения $\mathscr{L}u = 0$ и при некотором H и достаточно малом $h \in (0, H)$

$$\iint\limits_{\Omega} (y - \varphi(x))^{1-n} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 m_w(B(x, y - \varphi(x)))\, dz +$$
$$+ \int\limits_{R^n} N^p_{\Omega^H \cap \Omega_h} dm_w < \infty.$$

Тогда $u(z)$ имеет п. в. на $\partial\Omega$ некасательные пределы $u^+ \in L_p(\partial\Omega, w)$.

Следствие 2. При $p = 2$ и $\| F\Omega^H \|_{L_2(R^n, w)} < \infty$ утверждение, аналогичное следствию 1, справедливо для произвольного решения $u(z)$ уравнения (3).

Следствие 3. Пусть $\Omega_k = \{(x, y) : x \in R^n,\ y > \varphi^{(k)}(x)\}$, где функции $\varphi^{(k)}(x) > \varphi(x)$ удовлетворяют условию Липшица с единой константой и поточечно сходятся к $\varphi(x)$. В условиях следствия 1 будет $\sup\limits_k \| u \|_{L_p(\partial\Omega_k, w)} < \infty$ и $u(x, \varphi^{(k)}(x))$ сходиться к $u^+(x)$ в норме $L_p(R^n, w)$. В условиях следствия 2 то же верно при $p = 2$ для любого решения уравнения (3).

Следствия 1—3 обобщают некоторые результаты [13, 14]. Результаты п. 2 переносятся на случай ограниченных областей, границы которых локально представимы в виде (1), (2). При $n = 1$ это области Радона без точек возврата. Величину $y - \varphi(x)$ следует заменить расстоянием точки $z \in \Omega$ до $\partial\Omega$, m — поверхностной мерой σ на $\partial\Omega$. Мера m_w определяется на $\partial\Omega$, и условие (A_∞) записывается в виде

$$m_w(E)/m_w(A(z', r)) \leqslant C(\sigma(E)/\sigma(A(z', r)))^\theta, \quad \theta > 0,$$

где $z' \in \partial\Omega$, $A(z', r) = K(z', r) \cap \partial\Omega$, $E \subset A(z', r)$.

1. *Burkholder D. L., Gundy R. F.* Distribution functions inequalities for the area integral // Studia Math.— 1972.— 44, N 6.— P. 527—544.
2. *Gundy R. F., Wheeden R. L.* Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function Luzin area integral and Walsh—Paley series // Ibid.— 1974.— 49, N 2.— P. 107—124.
3. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб.— 1987.— 133 (175), № 4.— С. 446—468.
4. *Шелепов В. Ю., Тедеев Ал. Ф.* Об одном неравенстве для решений эллиптических уравнений и его применении в теории граничных свойств // Докл. АН СССР.— 1990.— 315, № 1.— С. 40—43.
5. *Скрыпник И. И.* Локальные L_p-граничные значения решений линейных эллиптических уравнений.— Донецк, 1989.— С. 3—20. (Препр. / АН УССР. ИПММ № 89.04).
6. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в негладких пространственных областях (L_p-весовой случай) // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 2.— С. 22—25.
7. *Шелепов В. Ю.* О граничных значениях в L_p неотрицательных решений эллиптических уравнений в негладких пространственных областях // Мат. физика и нелин. механика.— 1990.— Вып. 13.— С. 82—87.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— 342 с.
9. *Muckenhoupt B.* The equivalence of two conditions for weight functions // Studia Math.— 1974.— 49, N 2.— P. 101—106.
10. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— 165.— P. 207—226.
11. *Coifman R., Fefferman C.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math.— 1974.— 51 N 3.— P. 241—250.
12. *Кружков С. Н., Купцов Л. П.* О неравенстве Харнака для решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1.— 1964.— № 3.— С. 3—13.
13. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1979.— 108 (150), № 1.— С. 3—21.
14. *Петрушко И. М.* О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Там же.— 1983.— 120 (162), № 4.— С. 569—588.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 15.11.90